ماز

دورهٔ جمع‌بندی دوپینگ

سه‌شنبه

۱۴۰۴/۰۱/۲۶

بانک سؤالات کنکور:

جامع شمارش، بدون شمردن

آمار و احتمال

(فصل ۶ و ۷ دهم / فصل ۷ یازدهم / فصل ۷ دوازدهم)

دفترچه پاسخ

دوپینگ ماز

گروه آزمایشی علوم تجربی

ریاضی

درس	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	زمان پیشنهادی
ریاضی	۳۸	۱	۳۸	۵۷ دقیقه

هفته اول	هفته دوم	هفته سوم	هفته چهارم		هفته پنجم	هفته ششم
مباحث پایه	جامع تابع ـ توابع نمایی و لگاریتمی	جامع مثلثات	جامع حد و پیوستگی	جامع مشتق و کاربرد مشتق	الگو و دنباله + توان‌های گویا عبارت‌های جبری + جامع هندسه	جامع شمارش، بدون شمردن

۵۵ روز جمع‌بندی تا کنکور اردیبهشت

دفترچهٔ مکمل دوپینگ: این دفترچه روز بعد از آزمون دوپینگ هر درس در اختیار شما قرار می‌گیرد و شامل بانک سؤالات کنکورهای سراسری ۹۸ تا ۱۴۰۳ در همان مبحث است تا ضمن مرور مجدد، سیر تست‌های کنکور در هر مبحث را به دقت مورد بررسی قرار دهید.

سؤالات کنکور: فصل ۶ دهم (شمارش)

۱- گل‌فروشی از ۸ نوع گل مختلف، به چند طریق، می‌تواند دسته گل‌های متمایز درست کند، به‌طوری‌که در هر دسته ۴ یا ۵ یا ۶ شاخه مختلف، موجود باشد؟

۱) ۱۲۶ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۵۴ ۴) ۱۶۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶) (کنکور داخل ۹۸)

نکتهٔ ۱:

تعداد حالت‌های انتخاب k شیء از n شیء برابر است با:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

نکتهٔ ۲:

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$$

ابتدا با انتخاب ۴ یا ۵ یا ۶ شاخهٔ گل از بین ۸ شاخهٔ گل مختلف داریم:

تعداد دسته‌گل‌های ۴ تایی: $\binom{۸}{۴}=\frac{۸\times۷\times۶\times۵\times\cancel{۴!}}{\cancel{۴!}\times۴\times۳\times۲\times۱}=۷۰$

تعداد دسته‌گل‌های ۵ تایی: $\binom{۸}{۵}=\binom{۸}{۳}=\frac{۸\times۷\times۶\times\cancel{۵!}}{\cancel{۵!}\times۳\times۲\times۱}=۵۶$

تعداد دسته‌گل‌های ۶ تایی: $\binom{۸}{۶}=\binom{۸}{۲}=\frac{۸\times۷\times\cancel{۶!}}{\cancel{۶!}\times۲\times۱}=۲۸$

حال طبق اصل جمع، تعداد کل دسته گل‌ها برابر است با: $۷۰+۵۶+۲۸=۱۵۴$

گروه آموزشی ماز

۲- از هر ۵ مدرسه نمونه، ۴ نفر در اردویی شرکت دارند. به چند طریق می‌توان از بین آنان ۳ نفر انتخاب کرد، به‌طوری‌که هیچ دو نفر انتخاب شده، از یک مدرسه نباشند؟

۱) ۱۳۵ ۲) ۲۷۰ ۳) ۳۲۰ ۴) ۶۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۰۰۶) (کنکور خارج ۹۸)

ـ تعداد حالات انتخاب k شیء از n شیء برابر است با: $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$

ـ اگر کاری شامل k مرحله باشد به‌طوری‌که برای انجام مرحلهٔ اول $m_۱$ روش، برای انجام مرحلهٔ دوم $m_۲$ روش، .... و برای انجام مرحلهٔ kاُم m_k روش وجود داشته باشد به طوری که این مراحل مستقل از هم باشند، کار موردنظر به $m_۱\times m_۲\times\ldots\times m_k$ روش قابل انجام است. (اصل ضرب)

ابتدا سه مدرسه را از بین پنج مدرسه انتخاب می‌کنیم: $\binom{۵}{۳}=\binom{۵}{۲}=۱۰$

سپس از هر یک از سه مدرسه یک نفر را انتخاب می‌کنیم: $\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}\binom{۴}{۱}=۴\times۴\times۴=۶۴$

حال طبق اصل ضرب، تعداد حالت‌های ممکن، برابر است با: $۱۰\times۶۴=۶۴۰$

گروه آموزشی ماز

۳- به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به‌طوری‌که دو نفر آنان، نخواهند باهم در مهمانی شرکت کنند؟

۱) ۸۴ ۲) ۸۷ ۳) ۹۱ ۴) ۹۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶) (کنکور داخل ۹۹)

روش اول:

به کمک اصل متمم می‌توان نوشت:

تعداد حالت‌های مطلوب = تعداد کل حالت‌ها − تعداد حالت‌هایی که هردوی آن‌ها در مهمانی هستند

$$\binom{9}{5}-\left[\binom{2}{2}\times\binom{7}{3}\right]=126-35=91$$

روش دوم:

دو حالت داریم:

یکی از آن‌ها در مهمانی باشد : حالت اول $\Rightarrow \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{انتخاب یک نفر از دو نفر}}\times\underbrace{\binom{7}{4}}_{\text{انتخاب ۴ نفر از بقیه}}=70$

هیچ کدام در مهمانی نباشند: حالت دوم $\Rightarrow \underbrace{\binom{7}{5}}_{\text{انتخاب ۵ نفر فقط از بقیه}}=21$

$\Rightarrow$ تعداد حالت‌ها $=70+21=91$

گروه آموزشی ماز

۴- **به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز را بین ۳ نفر توزیع کرد، به‌شرط آنکه هر نفر حداقل یک کتاب، دریافت کند؟**

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶) (کنکور خارج ۹۹)

دو حالت داریم:

۱) به یک نفر سه کتاب و به دو نفر دیگر هر کدام یک کتاب بدهیم:

$$\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{انتخاب یک نفر}}\overbrace{\binom{5}{3}}^{\text{انتخاب سه کتاب از پنج کتاب}}\times\underbrace{2!}_{\text{دو نفر دیگر}}=3\times10\times2=60$$

۲) به دو نفر دو کتاب و به یک نفر باقی‌مانده یک کتاب بدهیم:

$$\underbrace{\binom{3}{2}}_{\text{انتخاب دو نفر}}\overbrace{\binom{5}{2}}^{\text{انتخاب دو کتاب از پنج کتاب}}\times\underbrace{\binom{3}{1}}_{\text{انتخاب یک کتاب برای نفر دیگر}}=3\times10\times3=90$$

در نهایت تعداد کل حالات برابر است با: $60+90=150$

گروه آموزشی ماز

۵- **در یک جلسهٔ آموزشی میزگردی شامل ۴ دانش‌آموز کلاس پایهٔ یازدهم و ۴ دانش‌آموز کلاس پایهٔ دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش‌آموزان در صندلی‌ها بنشینند، به‌طوری‌که در کنار هر دانش‌آموزی، دانش‌آموز هم‌پایه قرار نگیرد؟**

۱) ۱۴۴ ۲) ۲۸۸ ۳) ۲۷۶ ۴) ۱۱۵۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۰۰۶) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

اگر n نفر دور یک میزگرد بنشینند، تعداد کل حالات ممکن برابر است با: $(n-1)!$

ابتدا ۴ دانش‌آموز پایهٔ دوازدهم را دور میز می‌نشانیم که تعداد حالت‌های انجام این کار به $(4-1)!=3!$ طریق است. سپس ۴ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم را در بین دانش‌آموزان پایهٔ دوازدهم می‌نشانیم که این عمل نیز به $4!$ طریق انجام می‌گیرد که در کل تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$3!\times4!=6\times24=144$

گروه آموزشی ماز

۶- به چند طریق ۳ بازیکن فوتبال، ۲ بازیکن والیبال و ۳ شناگر دور یک میز بنشینند، به‌طوری‌که افراد هم‌تیمی کنار هم باشند؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۱۶ ۴) ۴۳۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۰۰۶) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

اگر n نفر دور یک میزگرد بنشینند، تعداد کل حالات ممکن برابر است با: $(n-1)!$

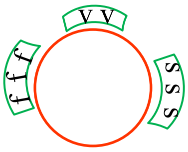
بازیکنان فوتبال را با f، بازیکنان والیبال را با v و شناگران را با s نشان می‌دهیم، می‌دانیم که قرار است افراد هم‌تیمی کنار هم باشند، بنابراین مطابق شکل مقابل داریم:

جایگشت فوتبالی‌ها

$$3!\times 3!\times 2!\times(3-1)!=144$$

جایگشت شناگرها

جایگشت والیبالیست‌ها



گروه آموزشی ماز

۷- ۷ کتاب در موضوعات مختلف که ریاضی، فیزیک و زیست هم جزو آن‌هاست، در اختیار داریم. به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را طوری انتخاب کرد که اگر ریاضی انتخاب شود، زیست نیز انتخاب شود و اگر فیزیک انتخاب شود، زیست انتخاب نشود؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۵ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ ۱۰۰۶) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

$$F\ Z\ R\ \underbrace{\otimes\ \bigcirc\ \odot\ \oplus}_{\text{۴کتاب دیگر}}$$

حالت اول: ریاضی انتخاب شود که در این صورت زیست نیز باید انتخاب شود و چون زیست انتخاب شده است دیگر نمی‌توانیم فیزیک را انتخاب کنیم، پس:

$$\binom{2}{2}\underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{بقیه}}=1\times\frac{4\times3}{2}=6$$

حالت دوم: فیزیک تنها انتخاب شود که در این صورت زیست را نمی‌توانیم انتخاب کنیم، پس:

$$\binom{1}{1}\underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{بقیه}}=4$$

حالت سوم: زیست تنها انتخاب شود که در این صورت فیزیک را نیز نمی‌توانیم انتخاب کنیم، پس:

$$\binom{1}{1}\underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{بقیه}}=4$$

حالت چهارم: زیست و ریاضی و فیزیک انتخاب نشوند و هر ۴ کتاب از بقیه کتاب‌ها باشد:

$$\binom{4}{4}=1$$

جمع حالت‌ها: $6+4+4+1=15$

گروه آموزشی ماز

۸- ۴ کتاب متمایز با موضوع ریاضی و ۲ کتاب متمایز با موضوع آمار را به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد، به‌طوری‌که موضوع دو کتاب مجاور هر کتاب (به جز کتاب اول و آخر)، متفاوت باشد؟

۱) ۹۶ ۲) ۷۲ ۳) ۴۸ ۴) ۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

دو کتاب اول و آخر قطعاً ریاضی هستند، آن‌ها را کنار می‌گذاریم، سپس بقیه کتاب‌ها را یکی در میان می‌چینیم:

$$\underbrace{\binom{4}{2}\times 2!}_{\text{دو کتاب اول و آخر}}\times\underbrace{(2!\times 2!\times 2)}_{\text{یکی در میان چیدن}}=96$$

گروه آموزشی ماز

۹- چند عدد یازده رقمی با ارقام ۱ و ۲ می‌توان نوشت به‌طوری‌که مضرب ۶ باشند؟

۱) ۱۳۱ ۲) ۲۲۱ ۳) ۳۴۱ ۴) ۴۳۱

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۶) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته:

ـ اگر عددی بر α بخش‌پذیر باشد، بر مقسوم‌علیه α نیز بخش‌پذیر است.

ـ اعدادی بر ۳ (۹) بخش‌پذیرند که مجموع ارقام آن‌ها بر ۳ (۹) بخش‌پذیر باشد.

ـ اعدادی بر ۲^n بخش‌پذیرند که n رقم سمت راست آن بر ۲^n بخش‌پذیر باشند.

ـ اعدادی بر ۱۱ بخش‌پذیرند که اگر از سمت راست ارقام آن را به ترتیب یکی در میان مثبت و منفی بگیریم، مجموع ارقامش بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد.

یکان همواره ۲ است. مجموع ارقام باید مضرب ۳ باشد.

تعداد ۱	تعداد ۲	
۱۰	۱	$\rightarrow \binom{۱۰}{۱۰}=۱$
۷	۴	$\rightarrow \binom{۱۰}{۷}=۱۲۰$
۴	۷	$\rightarrow \binom{۱۰}{۴}=۲۱۰$
۱	۱۰	$\rightarrow \binom{۱۰}{۱}=۱۰$

$\xrightarrow{+} ۳۴۱$

گروه آموزشی ماز

۱۰- فرض کنید $a,b,c\in\{۱,۲,...,۹\}$. چند معادلهٔ درجهٔ دوم به‌صورت $ax^۲+bx-c=۰$ می‌توان تشکیل داد، به‌طوری‌که مجموع ریشه‌های هر معادله از حاصل‌ضرب ریشه‌های همان معادله، دو واحد بیشتر باشد؟

۱) ۱۴ ۲) ۱۵ ۳) ۱۶ ۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ ترکیبی / مفهومی ـ ۱۰۰۶) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

با توجه به معادله درجه دوم $ax^۲+bx-c=۰$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها}=S=-\dfrac{b}{a} \\ \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=P=\dfrac{-c}{a} \end{cases}$$

طبق گفتهٔ سؤال می‌دانیم که مجموع ریشه‌های معادله از حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله ۲ واحد بیشتر است، پس:

$$S=P+۲\Rightarrow -\frac{b}{a}=-\frac{c}{a}+۲\Rightarrow -\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=۲\Rightarrow \frac{c-b}{a}=۲\Rightarrow c-b=۲a$$

با توجه به رابطهٔ فوق می‌توان گفت که b و c را از اعداد $\{۱,۲,...,۹\}$ باید طوری انتخاب کنیم که $c-b$، مقداری زوج باشد، پس باید b و c هر دو زوج و یا هر دو فرد باشند، پس:

$$\begin{cases} b,c\in\{۱,۳,۵,۷,۹\}\Rightarrow \text{تعداد حالات}:\binom{۵}{۲}=۱۰ \\ b,c\in\{۲,۴,۶,۸\}\Rightarrow \text{تعداد حالات}:\binom{۴}{۲}=۶ \end{cases}\Rightarrow \text{تعداد کل حالات}=۱۰+۶=۱۶$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- فرض کنید $a,b,c\in\{۱,۲,...,۹\}$. چند معادلهٔ درجهٔ دوم به‌صورت $ax^۲+bx-c=۰$ می‌توان نوشت که فاصلهٔ حاصل‌ضرب ریشه‌های هر معادله با جمع ریشه‌های آن معادله، دو واحد باشد؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ ترکیبی / مفهومی ـ ۱۰۰۶) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

با توجه به معادلهٔ درجهٔ دوم $ax^۲+bx-c=۰$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} \text{مجموع ریشه‌ها}=S=-\dfrac{b}{a} \\ \text{حاصل‌ضرب ریشه‌ها}=P=\dfrac{-c}{a} \end{cases}$$

طبق گفتهٔ سؤال می‌دانیم که فاصلهٔ حاصل‌ضرب ریشه‌ها با جمع ریشه‌های معادله برابر ۲ واحد است، لذا:

$$|P-S|=۲\Rightarrow\left|-\frac{c}{a}-(-\frac{b}{a})\right|=۲\Rightarrow\left|-\frac{c}{a}+\frac{b}{a}\right|=۲\Rightarrow\left|\frac{b-c}{a}\right|=۲$$

می‌دانیم که $a\in\{۱,۲,...,۹\}$ و $a>۰$ است، پس:

$$\frac{|b-c|}{a}=۲\Rightarrow|b-c|=۲a$$

با توجه به رابطهٔ فوق می‌توان گفت که b و c را از اعداد $\{۱,۲,...,۹\}$ باید طوری انتخاب کنیم که تفاضل آن‌ها برابر $۲a$ باشد به عبارتی b و c باید طوری انتخاب شوند که تفاضل آن‌ها عددی زوج باشد، پس:

الف) b و c از اعداد فرد انتخاب شوند: $b,c\in\{۱,۳,۵,۷,۹\}$ $\binom{۵}{۲}=۱۰$

ب) b و c از اعداد زوج انتخاب شوند: $b,c\in\{۲,۴,۶,۸\}$ $\binom{۴}{۲}=۶$

بنابراین برای انتخاب b و c، $۱۰+۶=۱۶$ حالت داریم، ولی با توجه به $|b-c|$ می‌توان گفت که b و c می‌توانند جابه‌جا شوند، بنابراین تعداد کل حالات مطلوب برابر $۲\times۱۶=۳۲$ حالت است.

گروه آموزشی ماز

سؤالات کنکور: فصل ۷ دهم (احتمال)

۱۲- در جعبه‌ای ۵ مهرهٔ سفید و ۶ مهرهٔ سیاه است. ابتدا یک مهره را بدون رویت خارج می‌کنیم. سپس از بین بقیهٔ مهره‌ها، ۲ مهره بیرون می‌کشیم. با کدام احتمال هر دو مهرهٔ اخیر، سفید است؟

۱) $\frac{۱}{۱۱}$ ۲) $\frac{۲}{۱۱}$ ۳) $\frac{۴}{۱۱}$ ۴) $\frac{۵}{۲۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۷) (کنکور داخل ۹۸)

چون مهرهٔ اول را بدون رؤیت خارج کرده‌ایم، بنابراین فرض می‌کنیم که اتفاقی نیفتاده (شتر دیدی ندیدی!). حالا به محاسبهٔ احتمال موردنظر می‌پردازیم.

$$P(\text{دو سفید})=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\binom{۵}{۲}}{\binom{۱۱}{۲}}=\frac{\frac{۵\times۴}{۲\times۱}}{\frac{۱۱\times۱۰}{۲\times۱}}=\frac{۲۰}{۱۱۰}=\frac{۲}{۱۱}$$

گروه آموزشی ماز

۱۳- پنج کتاب زبان فارسی و ۳ کتاب زبان انگلیسی، به تصادف در یک قفسه کنار هم چیده شده‌اند. با کدام احتمال کتاب‌های هم زبان، کنار هم قرار می‌گیرند؟

۱) $\frac{۱}{۱۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲۱}$ ۳) $\frac{۱}{۲۸}$ ۴) $\frac{۱}{۵۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۷) (کنکور داخل ۹۹)

اگر همهٔ کتاب‌های فارسی را یک بسته و همهٔ کتاب‌های انگلیسی را نیز یک بسته فرض کنیم، در این صورت، تعداد حالت‌های مطلوب سؤال برابر است با:

جایگشت دو بسته کتاب فارسی و انگلیسی

جایگشت کتاب‌های انگلیسی با هم $\leftarrow ۳!\times۵!\times۲!$ $\Rightarrow n(A)=۳!\times۵!\times۲!$

جایگشت کتاب‌های فارسی با هم

از طرفی تعداد کل حالت‌های قرار گرفتن این ۸ کتاب در کنار یکدیگر برابر $n(S)=۸!$ است. بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳!\times۵!\times۲!}{۸!}=\frac{۲}{۵۶}=\frac{۱}{۲۸}$$

گروه آموزشی ماز

۱۴- ۱۰ نفر در یک صف ایستاده‌اند. با کدام احتمال دو فرد موردنظر از آن‌ها، در کنار هم نیستند؟

۱) $\frac{۲}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۹}{۱۰}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۷) (کنکور خارج ۹۹)

از روش متمم استفاده می‌کنیم، یعنی ابتدا کل حالات را حساب کرده و تعداد حالاتی که دو نفر در کنار هم باشند را از آن کم می‌کنیم:

$n(S)=10!$ کل حالات

تعداد حالاتی که دو نفر کنار هم باشند:

$$\underbrace{\overbrace{\boxed{\text{دو نفر موردنظر}}}^{2!}\ \boxed{\text{۸نفر باقی‌مانده}}}_{9!} \Rightarrow n(A')=9!\times 2!$$

بنابراین احتمال مطلوب برابر است با:

$$P(A)=1-P(A')=1-\frac{n(A')}{n(S)}=1-\frac{9!\times 2!}{10!}=1-\frac{2}{10}=\frac{4}{5}$$

گروه آموزشی ماز

۱۵- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم، که در آن رقم تکراری به کار نرفته باشد. یک عضو از مجموعهٔ فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عضو انتخاب شده بر ۴ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{13}{21}$ ۲) $\frac{4}{7}$ ۳) $\frac{1}{5}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۷) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

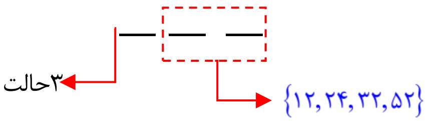
به بررسی حالت‌ها می‌پردازیم:

۱) اگر عدد یک رقمی باشد، احتمال اینکه به ۴ بخش‌پذیر باشد، برابر است با $\frac{1}{5}$ چرا که از بین اعداد داده شده تنها عدد ۴ بر ۴ بخش‌پذیر است.

۲) می‌دانیم عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که دو رقم سمت راست آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد، پس اگر عدد انتخابی دو رقمی باشد، باید یکی از اعداد ۱۲، ۲۴، ۳۲ و یا ۵۲ باشد که در این حالت احتمال مطلوب برابر است با:

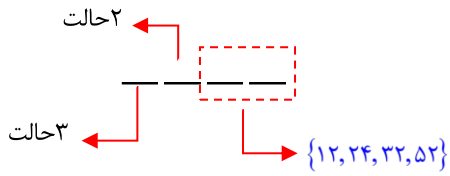
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{5\times 4}=\frac{1}{5}$$

۳) اگر عدد سه رقمی باشد در این صورت دو رقم سمت راست آن باید یکی از اعداد ۱۲، ۲۴ و ۳۲ و یا ۵۲ باشد و با توجه به اینکه ارقام نباید تکراری باشند رقم صدگان نیز می‌تواند ۳ حالت را بپذیرد، بنابراین احتمال مطلوب در این حالت برابر است با:



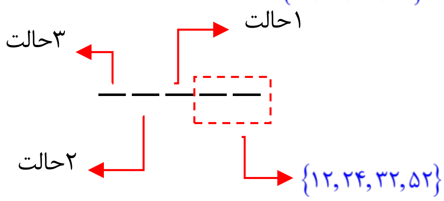
$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3\times 4}{5\times 4\times 3}=\frac{1}{5}$$

۴) اگر عدد ۴ رقمی باشد، نیز داریم:



$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3\times 2\times 4}{5\times 4\times 3\times 2}=\frac{1}{5}$$

۵) اگر عدد ۵ رقمی باشد:



$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{3\times 2\times 1\times 4}{5\times 4\times 3\times 2\times 1}=\frac{1}{5}$$

جواب سؤال برابر $\frac{1}{5}$ است.

گروه آموزشی ماز

۱۶- با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ زیرمجموعه‌ای از اعداد طبیعی می‌سازیم، که در هر عضو آن، رقم تکراری به کار نرفته باشد، یک عضو از مجموعهٔ فوق انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عضو انتخاب شده بر ۳ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟

۱) $\frac{66}{205}$ ۲) $\frac{67}{205}$ ۳) $\frac{168}{325}$ ۴) $\frac{177}{325}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۷) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که جمع ارقام آن عدد بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

ابتدا کل اعداد طبیعی را که با ارقام ۵,۴,۳,۲,۱ ساخته می‌شوند را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} \text{پنج رقمی}: ۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۵!=۱۲۰ \\ \text{چهار رقمی}: ۵\times۴\times۳\times۲=۵!=۱۲۰ \\ \text{سه رقمی}: ۵\times۴\times۳=۶۰ \\ \text{دو رقمی}: ۵\times۴=۲۰ \\ \text{یک رقمی}: ۵ \end{cases} \Rightarrow ۱۲۰+۱۲۰+۶۰+۲۰+۵=۳۲۵$$

حال از بین این ۳۲۵ عدد، تعداد اعداد طبیعی را که بر ۳ بخش‌پذیر باشند را نیز به دست می‌آوریم، می‌دانیم عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که جمع ارقام آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد. یعنی:

یک رقمی بخش‌پذیر بر ۳ : ۳ ← ۱ حالت

دو رقمی بخش‌پذیر بر ۳ : $\left.\begin{matrix} ۲,۴ \\ ۱,۵ \\ ۱,۲ \\ ۴,۵ \end{matrix}\right\} \to ۴\times ۲!=۸$ حالت

سه رقمی بخش‌پذیر بر ۳ : $\left.\begin{matrix} ۴,۳,۲ \\ ۳,۴,۵ \\ ۱,۲,۳ \\ ۳,۵,۱ \end{matrix}\right\} \to ۴\times ۳!=۲۴$ حالت

چهار رقمی بخش‌پذیر بر ۳ : $۵,۴,۲,۱ \to ۱\times۴!=۲۴$ حالت

پنج رقمی بخش‌پذیر بر ۳ : $۵,۴,۳,۲,۱ \to ۱\times۵!=۱۲۰$ حالت

احتمال مطلوب $=\dfrac{۱۷۷}{۳۲۵}$

گروه آموزشی ماز

۱۷- یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای بار kاُم «رو» ظاهر شود. احتمال آنکه دقیقاً n بار پرتاب لازم شود، $\dfrac{k}{k+۵}$ برابر احتمال آن است که در n پرتاب k بار سکه «رو» بیاید. کدام مقدار می‌تواند $n+k$ باشد؟

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۰۰۷) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته:

ـ اگر اتفاقی شامل ۲ پیشامد $a_۱$ و $a_۲$ با احتمال‌های p و q باشد، احتمال آن که در n بار اتفاق، k بار پیشامد $a_۱$ و $(n-k)$ بار پیشامد $a_۲$ روی دهد، برابر است با:

$$\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$$

ـ احتمال آن‌که دقیقاً n بار اتفاق لازم باشد تا k بار پیشامد $a_۱$ روی دهد، برابر است با:

$$\binom{n-۱}{k-۱}p^kq^{n-k}$$

تبصره: در نکتهٔ دوم در $n-۱$ بار اتفاق باید $k-۱$ بار پیشامد $a_۱$ روی داده باشد.

$$\frac{\binom{n-۱}{k-۱}(\frac{۱}{۲})^n}{\binom{n}{k}(\frac{۱}{۲})^n}=\frac{k}{k+۵}\Rightarrow\frac{\frac{(n-۱)!}{(n-k)!(k-۱)!}}{\frac{n!}{(n-k)!k!}}=\frac{k}{k+۵}$$

$$\Rightarrow\frac{k}{n}=\frac{k}{k+۵}\Rightarrow k+۵=n\Rightarrow ۲k+۵=n+k\xrightarrow{(k>۰)}n=۹$$

گروه آموزشی ماز

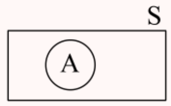
۱۸- در پرتاب دو تاس با کدام احتمال عدد ظاهرشده یک تاس کمتر از دیگری است؟

۱) $\frac{۷}{۱۲}$ ۲) $\frac{۵}{۱۲}$ ۳) $\frac{۱}{۶}$ ۴) $\frac{۵}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۰۰۷) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

احتمال

برای محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد، کافی است تعداد عضوهای آن پیشامد را بر تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای تقسیم کنیم.



$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$$

$$A\subseteq S\Rightarrow ۰\le n(A)\le n(S)\xrightarrow{\div n(S)}۰\le\frac{n(A)}{n(S)}\le ۱\Rightarrow ۰\le P(A)\le ۱$$

چون می‌خواهیم یکی از اعداد ظاهر شده کوچک‌تر از تاس دیگر باشد، بنابراین باید اعداد تاس‌ها با هم برابر نباشند، پس:

$$\begin{cases}n(S)=۶^۲=۳۶\\ n(A)=۳۶-۶=۳۰\end{cases}\Rightarrow P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۰}{۳۶}=\frac{۵}{۶}$$

توجه داشته باشد که در حالت های $(۱,۱),(۲,۲),\dots,(۶,۶)$ اعداد ظاهر شده روی تاس با هم برابرند که آن‌ها را از فضای کل کم کردیم ولی در بقیه حالت‌ها عدد روی یک تاس، از عدد تاس دیگر کوچک‌تر است. لذا گزینهٔ ۴ صحیح است.

سؤالات کنکور: فصل ۷ یازدهم (احتمال)

۱۹- احتمال موفقیت فردی، در آزمون اول ۰/۷ و در آزمون دوم ۰/۶ است. اگر این فرد در آزمون اول موفق شود، احتمال موفقیت وی در آزمون دوم ۰/۸ است. با کدام احتمال، لااقل در یکی از این دو آزمون، موفق می‌شود؟

۱) ۰/۷۴ ۲) ۰/۷۶ ۳) ۰/۸۲ ۴) ۰/۸۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۷) (کنکور داخل ۹۸)

ـ احتمال اینکه حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ بدهد، برابر است با:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

ـ احتمال رخ دادن A به شرط رخ دادن B برابر است با:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

اگر پیشامد موفقیت فرد در آزمون اول را A و پیشامد موفقیت او در آزمون دوم را B فرض کنیم، داریم:

$$P(A)=۰/۷\ ,\ P(B)=۰/۶$$

$$P(B|A)=۰/۸\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=۰/۸\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{۰/۷}=۰/۸\Rightarrow P(A\cap B)=۰/۵۶$$

می‌دانیم احتمال "حداقل یکی" برابر $P(A\cup B)$ است، پس:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۷+۰/۶-۰/۵۶=۰/۷۴$$

۲۰- در یک کارگاه، دو گروه مشغول کار هستند، میانگین نمرات مسئولیت‌پذیری و واریانس در گروه اول به‌ترتیب ۸۰ و ۲۵ و در گروه دوم ۷۲ و ۱۶ می‌باشد. کدام گروه بهتر است؟

۱) گروه اول ۲) گروه دوم ۳) یکسان ۴) اظهار نظر نمی‌توان کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۷) (کنکور داخل ۹۸)

ضریب تغییرات : $CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}$

ابتدا ضریب تغییرات را برای گروه اول و دوم به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} CV_1 = \dfrac{\sigma_1}{\bar{x}_1} = \dfrac{\sqrt{۲۵}}{۸۰} = \dfrac{۵}{۸۰} = \dfrac{۱}{۱۶} \\ CV_2 = \dfrac{\sigma_2}{\bar{x}_2} = \dfrac{\sqrt{۱۶}}{۷۲} = \dfrac{۴}{۷۲} = \dfrac{۱}{۱۸} \end{cases} \Rightarrow CV_2 < CV_1$$

حال با مقایسهٔ ضریب تغییرات هر دو گروه می‌توان فهمید که ضریب تغییرات گروه دوم کمتر است، پس گروه دوم بهتر است.

گروه آموزشی ماز

۲۱- احتمال موفقیت فردی، در یک آزمون مستقل، ۲ برابر احتمال موفقیت دوست وی است. احتمال لااقل یکی از آن دو، $\frac{۷}{۹}$ است. احتمال موفقیت این فرد کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۲}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۷) (کنکور خارج ۹۸)

ـ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند $P(A\cap B) = P(A)\times P(B) \Leftrightarrow$

ـ احتمال اینکه حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ بدهد:

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

اگر احتمال موفقیت دوست فرد را x فرض کنیم، احتمال موفقیت خود فرد ۲x خواهد بود. یعنی:

$$P(B) = x \ , \ \ P(A) = ۲x$$

می‌دانیم احتمال اینکه حداقل یکی از آن‌ها موفق شود برابر $\frac{۷}{۹}$ است. پس:

$$P(A\cup B) = P(A)+P(B)-\underbrace{P(A\cap B)}_{P(A).P(B)} \Rightarrow \frac{۷}{۹} = ۲x + x - ۲x^۲$$

دقت شود که A و B مستقل هستند. پس:

$$P(A\cap B) = P(A).P(B)$$

$$\Rightarrow ۱۸x^۲ - ۲۷x + ۷ = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲۷\pm\sqrt{۲۲۵}}{۳۶} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{۷}{۶} \times \\ x = \frac{۱}{۳} \checkmark \end{cases} \qquad (۰ \le P(B) \le ۱)$$

$$P(A) = ۲x = \frac{۲}{۳}$$

گروه آموزشی ماز

۲۲- نمرات مهارت برای کارگر (A): ۱۶، ۱۵، ۱۴ ، ۱۳ و ۱۲ و برای کارگر (B): ۱۶/۵ ، ۱۶، ۱۵/۵ ، ۱۳ و ۱۱/۵ بوده است. دقت عمل کدام بیشتر است؟

۱) A ۲) B ۳) یکسان ۴) اظهارنظر نمی‌توان کرد.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۷) (کنکور خارج ۹۸)

اگر $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ داده‌های آماری باشند:

- میانگین : $\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$
- واریانس : $\sigma^2 = \dfrac{(x_1-\bar{x})^2 + (x_2-\bar{x})^2 + \dots + (x_n-\bar{x})^2}{n}$
- ضریب تغییرات : $CV = \dfrac{\sigma}{\bar{x}}$

ابتدا میانگین و واریانس و به‌دنبال آن، ضریب تغییرات را برای نمرات دو کارگر A و B به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{x}_A = ۱۴ , \sigma_A^۲ = ۲ \Rightarrow CV_A = \frac{\sqrt{۲}}{۱۴} \simeq ۰/۱$$

$$\bar{x}_B = ۱۴/۵ , \sigma_B^۲ = ۳/۷ \Rightarrow CV_B = \frac{\sqrt{۳/۷}}{۱۴/۵} \simeq ۰/۱۳$$

$$\Rightarrow CV_A < CV_B$$

حال با مقایسهٔ ضریب تغییرات هر دو کارگر می‌توان فهمید که ضریب تغییرات فرد A کمتر است، پس دقت او بیشتر است.

گروه آموزشی ماز

۲۳- ضریب تغییرات داده‌های آماری به‌صورت جدول زیر، کدام است؟

داده	۱۰,۱۰,۱۰,۱۰,۱۰,۱۱,۱۱,۱۱,۱۱,۱۴,۱۴,۱۴,۱۴,۱۴,۱۴,۱۴

۱) ۰/۱۲ ۲) ۰/۱۵ ۳) ۰/۱۷ ۴) ۰/۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی_ ۱۱۰۷) (کنکور داخل ۹۹)

اگر $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ داده‌های آماری باشند:

- میانگین: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$
- واریانس: $\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}$
- ضریب تغییرات: $C = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

ابتدا از تمامی داده‌ها ۱۲ واحد کم می‌کنیم، در این صورت، میانگین داده‌های جدید نیز ۱۲ واحد کاهش می‌یابد. اما انحراف معیار و واریانس داده‌های جدید با داده‌های اولیه برابر است. بنابراین:

$$\underbrace{-۲,-۲,-۲,-۲,-۲}_{۵},\underbrace{-۱,-۱,-۱,-۱}_{۴},\underbrace{۲,۲,۲,۲,۲,۲,۲}_{۷}$$

$$\bar{x}_{جدید} - ۱۲ = \frac{۵(-۲)+۴(-۱)+۷(۲)}{۱۶} = ۰ \Rightarrow \bar{x}_{جدید} = ۱۲$$

حال به محاسبهٔ واریانس و انحراف معیار داده‌ها می‌پردازیم:

$$\sigma^2 = \frac{۵\times(-۲)^۲ + ۴\times(-۱)^۲ + ۷\times ۲^۲}{۱۶} = \frac{۲۰+۴+۲۸}{۱۶} = \frac{۱۳}{۴} \Rightarrow \sigma = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲}$$

در نهایت ضریب تغییرات داده‌ها برابر است با:

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{\frac{\sqrt{۱۳}}{۲}}{۱۲} = \frac{\sqrt{۱۳}}{۲۴} \simeq ۰/۱۵$$

گروه آموزشی ماز

۲۴- داده‌های آماری ۵، ۷، ۸، ۸، ۸، ۱۰ و ۱۰ مفروض‌اند. ضریب تغییرات داده‌ها، کدام است؟ $\left(\sqrt{\frac{۲}{۷}} \cong ۰/۵۳۴\right)$

۱) ۰/۱۵ ۲) ۰/۲۰ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۷) (کنکور خارج ۹۹)

اگر $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ داده‌های آماری باشند:

- میانگین: $\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$
- واریانس: $\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + ... + (x_n - \bar{x})^2}{n}$
- ضریب تغییرات: $CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$

ابتدا میانگین داده‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{۱۰+۱۰+۸+۸+۸+۷+۵}{۷} = \frac{۵۶}{۷} = ۸$$

حال واریانس داده‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\sigma^{۲}=\frac{۲(۱۰-۸)^{۲}+۳(۸-۸)^{۲}+(۷-۸)^{۲}+(۵-۸)^{۲}}{۷}=\frac{۱۸}{۷}\Rightarrow\sigma=\sqrt{\frac{۱۸}{۷}}=۳\sqrt{\frac{۲}{۷}}=۳(۰/۵۳۴)=۱/۶۰۲$$

$$\Rightarrow CV=\frac{\sigma}{\bar{x}}\simeq\frac{۱/۶}{۸}=۰/۲۰$$

گروه آموزشی ماز

۲۵- احتمال این‌که یک دانش‌آموز در یک امتحان نمره قبولی بگیرد ۰/۹ و در دو امتحان متوالی نمره قبولی بگیرد ۰/۸۵ است. اگر دانش‌آموز در امتحان دوم موفق باشد، احتمال این‌که امتحان قبلی نیز موفق شده باشد، کدام است؟

۱) $\frac{۸}{۹}$ ۲) $\frac{۸۵}{۹۴}$ ۳) $\frac{۱۷}{۱۸}$ ۴) $\frac{۴۵}{۴۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۷) (کنکور داخل ۱۴۰۰)

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند، احتمال رخ دادن پیشامد A به شرط رخ دادن پیشامد B برابر است با: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

اگر پیشامد موفقیت در امتحان اول را برابر A و پیشامد موفقیت در امتحان دوم را برابر B فرض کنیم، داریم: $P(A)=P(B)=۰/۹$

می‌دانیم احتمال اینکه دانش‌آموز در دو امتحان متوالی نمرهٔ قبولی بگیرد برابر ۰/۸۵ است، پس: $P(A\cap B)=۰/۸۵$

خواستهٔ سؤال از ما $P(A|B)$ است، بنابراین: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۸۵}{۰/۹}=\frac{۸۵}{۹۰}=\frac{۱۷}{۱۸}$

گروه آموزشی ماز

۲۶- احتمال متولد شدن یک خرگوش نر در یک نسل در اولین دورهٔ بارداری مادر، ۷۰ درصد و احتمال متولد شدن دو خرگوش نر در دو بار متوالی زایمان ۶۰ درصد است. اگر دومین فرزند خرگوش، نر باشد، احتمال آن‌که در زایمان قبلی خرگوش نر به دنیا آمده باشد، کدام است؟ (فرض بر این است که در هر دوره فقط یک تولد صورت می‌گیرد.)

۱) $\frac{۲۰}{۲۷}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۷}{۱۰}$ ۴) $\frac{۶}{۷}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۷) (کنکور خارج ۱۴۰۰)

اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای باشند، احتمال رخ دادن پیشامد A به شرط رخ دادن پیشامد B برابر است با: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$

A = پیشامد متولد شدن خرگوش نر در اولین دورهٔ بارداری B = پیشامد متولد شدن خرگوش نر در دومین دورهٔ بارداری

$A\cap B$ = پیشامد متولد شدن دو خرگوش نر در دو بار متوالی بارداری

$$\Rightarrow\begin{cases}P(A)=P(B)=۰/۷\\P(A\cap B)=۰/۶\end{cases}$$

سؤال از ما $P(A|B)$ را می‌خواهد، پس: $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{۰/۶}{۰/۷}=\frac{۶}{۷}$

گروه آموزشی ماز

۲۷- ۹ داده آماری را در نظر بگیرید. اختلاف هشت داده آماری، از میانگین برابر ۱+ یا ۱− و اختلاف یک داده از میانگین برابر صفر است. انحراف معیار این داده‌ها، کدام است؟

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $\frac{۲}{۳}$ ۴) $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (ساده ـ مفهومی ـ ۱۱۰۷) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

اگر $\bar{x}$ میانگین n داده آماری باشد در این صورت انحراف معیار داده‌ها برابر است با:

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^{۲}+(x_2-\bar{x})^{۲}+\dots+(x_n-\bar{x})^{۲}}{n}}$$

برای ۸ داده: $\begin{cases}(x_i-\bar{x})=+۱\\(x_i-\bar{x})=-۱\end{cases}\Rightarrow(x_i-\bar{x})^{۲}=۱$

و اختلاف یک داده از میانگین برابر صفر است، پس:

$$\sigma=\sqrt{\frac{(۸\times۱)+۰}{۹}}=\sqrt{\frac{۸}{۹}}=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$$

گروه آموزشی ماز

۲۸- داده‌های جمع‌آوری شده در یک مطالعه آماری اعداد طبیعی متوالی هستند. اگر به همه داده‌ها ۲ واحد بیافزاییم، اختلاف میانه و میانگین داده‌های جدید چقدر است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۱۰۷) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

اگر میانگین و میانهٔ داده‌های $x_1,x_2,\dots,x_n$ به‌ترتیب $\bar{x}$ و Q_2 باشند، میانگین و میانهٔ داده‌های $x_1+a,x_2+a,\dots,x_n+a$ برابر $\bar{x}+a$ و Q_2+a خواهد بود.

فرض: $a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 \Rightarrow$ میانه $=$ میانگین $=a_3=\bar{x}$

به داده‌ها ۲ واحد اضافه کنیم:

داده‌های جدید: $a_1+۲,a_2+۲,a_3+۲,a_4+۲,a_5+۲\Rightarrow\begin{cases}\text{میانه}=a_3+۲\\ \text{میانگین}=\bar{x}+۲\end{cases}$

در نتیجه اختلاف میانه و میانگین داده‌های جدید برابر است با:

$(\bar{x}+۲)-(a_3+۲)\xrightarrow{a_3=\bar{x}}$ صفر

گروه آموزشی ماز

۲۹- احتمال شیوع یک بیماری در جامعه‌ای برابر $۰/۰۸$ و احتمال بهبود یافتن فرد مبتلا به این بیماری برابر $۰/۵$ است. احتمال این که فردی از این جامعه به این بیماری مبتلا شود و بهبود یابد، چند درصد است؟

۱) $۰/۰۲$ ۲) $۰/۰۴$ ۳) ۲ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۷) (کنکور داخل ۱۴۰۱)

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، احتمال رخ دادن هم‌زمان آن‌ها از رابطهٔ $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ به‌دست می‌آید.

$P(A)=$ احتمال شیوع $=۰/۰۸$

$P(B)=$ احتمال بهبود $=۰/۵$

احتمال اینکه فردی به بیماری مبتلا بشود و بهبود یابد، یعنی $P(A\cap B)$ برابر است با:

$$۰/۰۸\times۰/۵=۰/۰۴$$

که به درصد می‌شود ۴ درصد.

گروه آموزشی ماز

۳۰- انحراف معیار شش داده آماری ۲ و اختلاف آن‌ها از میانگین برابر $۳,-۱,b,-۱,۰,a$ است. اگر $a>۰$ باشد، مقدار b کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) -۲ ۴) -۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۷) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

ـ انحراف معیار:

$$\sigma=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\dots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

ـ اختلاف هر داده از میانگین: $x_i-\bar{x}$

ـ مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین برابر صفر است.

$$۳-۱+b-۱+۰+a=۰\Rightarrow a+b=-۱\quad(۱)$$

$$\sqrt{\frac{۳^2+۱^2+b^2+(-۱)^2+۰+a^2}{۶}}=۲\Rightarrow\frac{۱۱+a^2+b^2}{۶}=۴$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a+b=-۱\\ a^2+b^2=۱۳\end{cases}\Rightarrow(a+b)^2=a^2+b^2+۲ab$$

$۱=۱۳+۲ab \Rightarrow ab=-۶ \quad (۲)$

$\xrightarrow{(۱) \text{ و } (۲)} \begin{cases} a=۲ \ , \ b=-۳ & ✓ \\ a=-۲ \ , \ b=۳ & \text{غ ق ق} \end{cases}$

گروه آموزشی ماز

۳۱- چارک دوم تعدادی داده آماری برابر ۳ است. قرینه میانگین داده‌های کوچک‌تر از میانه، ۶ واحد کوچک‌تر از میانگین داده‌های بزرگ‌تر از میانه است. اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین داده‌ها کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۴/۵ ۳) ۳ ۴) ۱/۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۷) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، $\bar{x}_1$ میانگین داده‌های کوچک‌تر از میانه و $\bar{x}_2$ میانگین داده‌های بزرگ‌تر از میانه باشند، آن‌گاه:

$$\bar{x}=\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{۲}$$

با توجه به نکته فوق داریم:

$$-\bar{x}_1=\bar{x}_2-۶ \Rightarrow \bar{x}_2+\bar{x}_1=۶$$

$$\bar{x}=\frac{\bar{x}_1+\bar{x}_2}{۲}=\frac{۶}{۲}=۳$$

گروه آموزشی ماز

۳۲- در یک دسته ۷ تایی از اعداد زوج متوالی (دسته اول)، انحراف معیار نصف میانگین است. هر بار، کوچک‌ترین عدد دسته را حذف نموده و عدد زوج دیگر را اضافه می‌کنیم به‌طوری‌که اعداد دسته جدید نیز متوالی هستند. ساختن دسته‌های مختلف را تا جایی ادامه می‌دهیم که میانگین آن دسته (دسته آخر)، مجذور انحراف معیار باشد. اختلاف بزرگ‌ترین عضو دسته اول و آخر کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۸ ۳) ۶ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۷) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

نکته:

ـ واریانس اعدادی که تشکیل دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت d و تعداد n می‌دهند برابر است با:

$$\sigma^2=\frac{n^2-۱}{۱۲}d^2$$

ـ در یک دنبالهٔ حسابی، واریانس هر n عدد متوالی با هم برابر می‌باشد.

$$\sigma^2=\frac{n^2-۱}{۱۲}\times d^2=\frac{۴۹-۱}{۱۲}\times ۴=۱۶ \Rightarrow \sigma=۴ \Rightarrow \bar{x}=۸$$

$$\Rightarrow ۲,۴,۶,۸,۱۰,۱۲,۱۴ \xrightarrow{\text{انحراف معیار ثابت است}} \bar{x}_{\text{جدید}}=۴^2=۱۶$$

دستهٔ جدید $\Rightarrow ۱۰,۱۲,۱۴,۱۶,۱۸,۲۰,۲۲$

$۲۲-۱۴=۸$

گروه آموزشی ماز

۳۳- اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی می‌شوند که در هر دسته، بزرگ‌ترین شمارنده مشترک بزرگ‌ترین عضو دسته و عضو دیگری از دسته برابر ۳ است. اختلاف میانه و میانگین دسته ششم کدام است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۷۵ ۳) ۱ ۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۴ (ساده ـ مفهومی ـ ۱۱۰۷) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

میانگین و میانه

میانگین $(\bar{x})$: میانگین داده‌های $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ برابر است با:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+x_3+\dots+x_n}{n}$$

میانه (Q_2): برای محاسبهٔ میانهٔ داده‌های $x_1,x_2,x_3,\dots,x_n$ ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، دادهٔ وسط و اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، میانگین دو دادهٔ وسط، میانه را مشخص می‌کند.

به عنوان مثال:

۱۴,۶,۳,۸,۱۰,۱۶ $\xrightarrow{\text{داده‌ها را مرتب می‌کنیم}}$ ۳,۶,۸,۱۰,۱۴,۱۶

میانه $= Q_۲ = \dfrac{۸+۱۰}{۲} = ۹$

۱۲,۷,۱۹,۲,۸,۱۳,۵ $\xrightarrow{\text{داده‌ها را مرتب می‌کنیم}}$ ۲,۵,۷,۸,۱۲,۱۳,۱۹

میانه $= Q_۲ = ۸$

قرار است که اعداد طبیعی را دسته‌بندی کنیم و می‌دانیم که در اعداد طبیعی متوالی، همواره میانه با میانگین برابر است، در نتیجه اختلاف میانه و میانگین برابر صفر است.

گروه‌آموزشی ماز

۳۴- اگر واریانس داده‌های ۵، ۱ و ۳a برابر $\frac{۸}{۳}$ باشد، میانگین این داده‌ها کدام است؟

۱) ۳　　۲) ۳/۵　　۳) ۴　　۴) ۴/۵

پاسخ: گزینهٔ ۱　　(متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۱۰۷) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

فرمول‌های مهم آمار

اگر $x_۱, x_۲, \dots, x_n$ داده‌های آماری باشند:

میانگین $\bar{x} = \dfrac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n}{n}$

واریانس $\sigma^۲ = \dfrac{(x_۱ - \bar{x})^۲ + \cdots + (x_n - \bar{x})^۲}{n}$ یا $\sigma^۲ = \dfrac{x_۱^۲ + x_۲^۲ + \cdots + x_n^۲}{n} - \bar{x}^۲$

انحراف معیار $\sigma = \sqrt{\text{واریانس}}$

ضریب تغییرات $C.V = \dfrac{\sigma}{\bar{x}}$

ابتدا میانگین داده‌ها را به‌دست می‌آوریم:

$$\bar{x} = \frac{۳a+۱+۵}{۳} = \frac{۳a+۶}{۳} = a+۲ \quad (*)$$

می‌دانیم که واریانس داده‌ها برابر $\frac{۸}{۳}$ است، پس:

$$\sigma^۲ = \frac{۸}{۳} \Rightarrow \frac{(۳a-(a+۲))^۲ + (۱-(a+۲))^۲ + (۵-(a+۲))^۲}{۳} = \frac{۸}{۳}$$

$$\Rightarrow (۲a-۲)^۲ + (-a-۱)^۲ + (-a+۳)^۲ = ۸ \Rightarrow ۴a^۲ - ۸a + ۴ + a^۲ + ۲a + ۱ + a^۲ - ۶a + ۹ = ۸$$

$$\Rightarrow ۶a^۲ - ۱۲a + ۶ = ۰ \xrightarrow{\div ۶} a^۲ - ۲a + ۱ = ۰ \Rightarrow (a-۱)^۲ = ۰ \Rightarrow a = ۱$$

به کمک رابطهٔ (*) داریم:

$$\bar{x} = a+۲ \xrightarrow{a=۱} \bar{x} = ۳$$

گروه‌آموزشی ماز

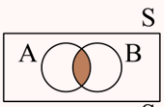
۳۵- دو نماینده فوتبال ایران در لیگ قهرمانان آسیا در بازی نخست مقابل نمایندگان یک کشور دیگر صف‌آرایی می‌کنند. احتمال برنده شدن نمایندگان ایران در این بازی به‌ترتیب ۰/۸ و ۰/۳ است. با کدام احتمال فقط یکی از تیم‌های ایرانی برنده بازی است؟

۱) ۰/۸۶　　۲) ۰/۷۲　　۳) ۰/۶۲　　۴) ۰/۵۶

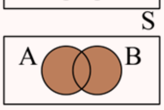
پاسخ: گزینهٔ ۳　　(متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۱۰۷) (کنکور خارج ۱۴۰۳)

قوانین احتمال

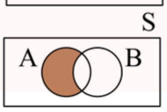
احتمال آن‌که A و B با هم (همزمان) رخ دهند.　$P(A \cap B) = \dfrac{n(A \cap B)}{n(S)}$



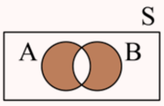
احتمال آن‌که از بین پیشامدهای A و B حداقل (دستکم) یکی رخ دهد.　$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$



احتمال آن‌که پیشامد A رخ دهد ولی B رخ ندهد. (فقط A رخ دهد)　$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$



احتمال آن‌که پیشامد A رخ دهد ولی B رخ ندهد یا B رخ دهد ولی A رخ ندهد. (فقط یکی از دو پیشامد رخ دهند)



$$P(A\Delta B)=P(A\cup B)-P(A\cap B)=P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$$

پیشامدهای مستقل

اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، وقوع یا عدم وقوع یکی روی رخ دادن یا ندادن دیگری تأثیری ندارد. برای دو پیشامد مستقل A و B می‌توان گفت:

A و B مستقل هستند $\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

روش اول:

اگر نمایندگان ایران در این بازی‌ها را A و B بنامیم، داریم:

$$\begin{cases}P(A)=۰/۸\to P(A')=۰/۲\\ P(B)=۰/۳\to P(B')=۰/۷\end{cases}$$

چون می‌خواهیم که فقط یکی از تیم‌های ایرانی برنده شود، بنابراین باید حاصل $P(B-A)+P(A-B)$ را به‌دست بیاوریم (فقط A یا فقط B)

$$P(B-A)+P(A-B)=P(B)-P(A\cap B)+P(A)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)-۲P(A\cap B)$$

از طرفی A و B از هم مستقل هستند، در نتیجه:

$$P(B-A)+P(A-B)=P(A)+P(B)-۲\big(P(A)\times P(B)\big)=۰/۸+۰/۳-۲(۰/۸\times ۰/۳)=۱/۱-۰/۴۸=۰/۶۲$$

روش دوم:

$$P(B-A)+P(A-B)=P(B\cap A')+P(A\cap B')=P(B)\times P(A')+P(A)\times P(B')=(۰/۳\times ۰/۲)+(۰/۸\times ۰/۷)$$
$$=۰/۰۶+۰/۵۶=۰/۶۲$$

گروه آموزشی ماز

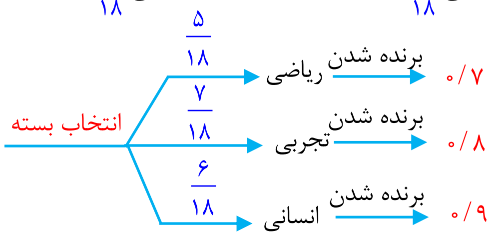
سؤالات کنکور: فصل ۷ دوازدهم (احتمال)

۳۶- بهروز جهت مشارکت در یک مسابقه، از بین پرسش‌های ۵ بستهٔ ریاضی، ۷ بستهٔ تجربی و ۶ بستهٔ علوم‌انسانی، به تصادف یک بسته اختیار کرده است. احتمال برنده شدن در هر بسته این دروس به‌ترتیب ۰/۷، ۰/۸ و ۰/۹ است. با کدام احتمال، بهروز برنده می‌شود؟

۱) $\frac{۲۵}{۳۶}$ ۲) $\frac{۲۹}{۳۶}$ ۳) $\frac{۳۰}{۳۶}$ ۴) $\frac{۳۱}{۳۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۷) (کنکور خارج ۹۸)

کل بسته‌ها برابر ۱۸ عدد هستند، پس احتمال انتخاب بستهٔ ریاضی $\frac{۵}{۱۸}$، احتمال انتخاب بستهٔ تجربی $\frac{۷}{۱۸}$ و احتمال انتخاب بستهٔ انسانی $\frac{۶}{۱۸}$ است.



پس احتمال برنده شدن بهروز برابر است با:

$$(\frac{۵}{۱۸}\times ۰/۷)+(\frac{۷}{۱۸}\times ۰/۸)+(\frac{۶}{۱۸}\times ۰/۹)=\frac{۳۵+۵۶+۵۴}{۱۸۰}=\frac{۱۴۵}{۱۸۰}=\frac{۲۹}{۳۶}$$

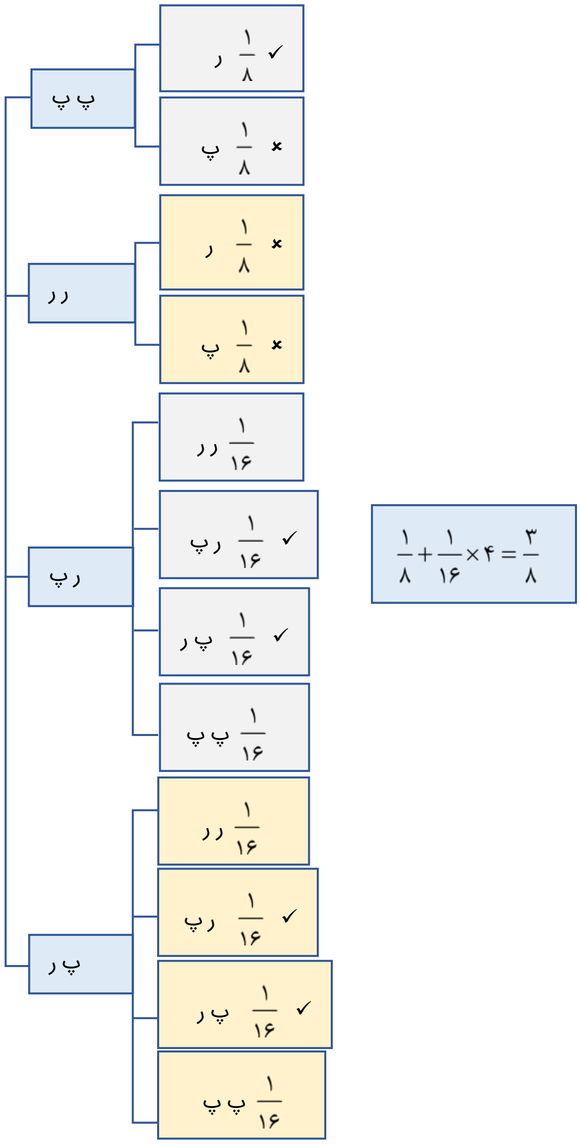
گروه آموزشی ماز

۳۷- دو سکه را پرتاب می‌کنیم. اگر هر دو سکه «رو» یا هر دو «پشت» ظاهر شوند، یک سکه دیگر می‌اندازیم، در غیر این‌صورت دو سکه دیگر پرتاب می‌کنیم. در مجموع با کدام احتمال، دقیقاً دو سکه به «پشت» ظاهر می‌شود؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۳}{۴}$ ۴) $\frac{۳}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ ۱۲۰۷) (کنکور خارج ۱۴۰۱)

با توجه به نمودار داریم:



گروه آموزشی ماز

۳۸- احتمال اینکه امیر برای قبولی در رشته پزشکی، یکی از سه دانشگاه A، B و C را انتخاب کند، به‌ترتیب، ۰/۴، ۰/۳۵ و ۰/۲۵ است. اگر او یکی از دانشگاه‌های A، B و C را انتخاب کند، به‌ترتیب، با احتمال ۰/۲۵، ۰/۳ و ۰/۳۵ در آن دانشگاه پذیرفته می‌شود. چند درصد احتمال دارد که امیر در رشته پزشکی قبول شود؟

۱) ۲۰/۵۵ ۲) ۲۹/۵۵ ۳) ۲۰/۲۵ ۴) ۲۹/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۷) (کنکور داخل ۱۴۰۲)

قانون احتمال کل:

اگر $A_1, A_2, ..., A_n$ پیشامدهایی باشند که بر روی فضای نمونه‌ای S یک افراز تشکیل داده باشند و B یک پیشامد دلخواه باشد،رابطهٔ زیر حاصل خواهد شد که به آن قانون احتمال کل می‌گوییم:

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$$

$$P=(0/4\times 0/25)+(0/35\times 0/3)+(0/25\times 0/35)=0/1+0/105+0/0875=0/2925\Rightarrow 29/25\%$$

گروه آموزشی ماز